



TITLE:

## 二成分対流系の層形成(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

楠本, 淑郎; 石井, 克哉

---

CITATION:

楠本, 淑郎 ...[et al]. 二成分対流系の層形成(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 476: 268-285

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103310>

RIGHT:

## 二成分対流系の層形成

東大・理 楠本 淑郎  
石井 克哉

### § 1 序

流体中で温度が安定成層、塩分濃度が不安定成層となる場合（こうした状況は極地方以外の海では屢々実現される）、全系としては安定成層であっても、温度と濃度の拡散速度の差に因ってソルトフィンガーと呼ばれる細長いコラム状の対流セルが出現する。これは最初 Stern (1960) の線形理論で予測されていたが、実際の海洋中に分子拡散による微細な流れが実在するとは却々信じられなかった。ところが Taft & Howe (1968) が大西洋地中海水流出域でサーモクラールの階段状密度分布を観測し、Turner (1967) がこの維持機構として密度飛躍層に存在するソルトフィンガーを想定した事から俄かに注目を浴びるようになった。Stern (1969) は幾つかの直観的近似の下で無限に延びたフィンガーが、斜めに入射する内部波のシアーによって不安定化される過程を線形安定論で議

論し、その結果フィンガーの分布が間歇的になると結論した。  
 しかし現在でも、二成分対流に固有な層形成の機構はよくわかっていない。ここでは温度・濃度が一様な勾配を持つ無限流体の系を考え、弱い非線形の理論から導出される振幅方程式を吟味する事により、層構造の空間周期性が何に由来するか、又如何なる状況下でフーレガーが不安定化し、不安定化した後の振舞はどうか等の問題について考察する。この方法は弱い非線形の理論である制約や、planform を固定する理想化の為、現実に見られる発達した乱流層そのものを記述する事はできないが、乱流への転移やその前駆現象を見るには有効である。

## §2 基礎方程式

温度( $T^*$ )、塩度( $S^*$ )、が共に鉛直方向に一様な正の勾配( $\bar{T}_z$ ,  $\bar{S}_z$ )をもつ分布する静止解( $\vec{u}=0$ )は常に可能で、その時状態方程式は  $\rho^* = \rho_0 [1 - (\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z) z]$  で表わされる。以降 Basic State として静的には安定な状態を考えるので常に  $\alpha^* \bar{T}_z > \beta^* \bar{S}_z$  に取る。Boussinesq 近似を行なった運動方程式から、静的な釣合の部分と差し引けば、無次元化された形の基礎方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{d\vec{u}}{dt} - \nabla^2 \vec{u} &= -\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} p + (Ra T - Rs S) \hat{z} \\ \frac{dT}{dt} - \nabla^2 T + w &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{dS}{dt} - \lambda \nabla^2 S + w = 0$$

ここで  $\vec{u} = (u, v, w)$ ,  $\hat{z}$  は鉛直上方向きの単位ベクトル。無次元パラメータは次の通りである。

プラントル数  $\sigma = \nu/\kappa_T$ , 拡散比  $\lambda = \kappa_S/\kappa_T < 1$ ,

$$\text{レイリー数 } Ra = \frac{\alpha^* \bar{T}_z}{\sigma(\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)}, \text{ 塩度レイリー数 } Rs = \frac{\beta^* \bar{S}_z}{\sigma(\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)}.$$

(2.1) の無次元化を行う際、代表的長さ  $D$  は  $[\kappa_T N]^{1/2}$  に取っている。  $N$  は Brunt Väisälä frequency で  $N = \{g(\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)\}^{1/2}$  である。この時  $Ra$  と  $Rs$  の間には次の関係がある。

$$Ra = Rs + 1/\sigma. \quad (2.2)$$

ソレノイダルな速度場は2つの任意関数  $\phi$  と  $\psi$  で表わすのが便利である。

$$(u, v, w) = (\phi_{xz} - \psi_z, \phi_{yz} + \psi_x, -\nabla_h^2 \phi) \quad (2.3)$$

$$\nabla_h^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$$

多くの対流問題の様に渦度の  $z$  成分が自動的に消える時は、 $\psi = 0$  と置ける。Schirtcliffe & Turner (1970) の可視化実験を踏まえ、フィンガーが正方形 planform を持つとして

$$\phi = A \sin lx \sin ly, \quad \psi = 0 \quad (2.4)$$

と置く。(2.4) を (2.1) に代入し、 $\phi$  に関して線形化を行い、 $A$  を時間だけの関数(流れは一方向流)であると仮定するとフィンガーが成長する為の条件は

$$Ra < Rc \equiv R_s/\lambda - 4\lambda^4 \quad (2.5)$$

である事が直ちに導ける。そこで supercriticality  $\delta$  を導入して

$$Ra \equiv (1-\delta) Rc \quad (2.6)$$

とする。  $\delta$  と  $R_s$  を指定すれば、(2.2), (2.5), (2.6) により系が指定される。但し許されるレンジは  $R_s > \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda}{1-\lambda}$ ,  $0 < \delta < 1$  である。

ここで興味があるのは、 $A$  の時間的、空間的 (鉛直方向の) 挙動であり、その変動は  $\delta$  が小さければ、 $x, y$  の変動に較べ極くゆっくりとしたものになる筈である。中立曲線  $Ra = Rc$  上では安定性交換の原理が成立つから、ゆっくり変わる変数で、 $\tau$  を次のように導入する。

$$\tau = \delta t \quad (\partial_t = \delta \partial_\tau), \quad \zeta = \delta^{\frac{1}{2}} z \quad (\partial_z = \delta^{\frac{1}{2}} \partial_\zeta). \quad (2.7)$$

$A$  は  $(\tau, \zeta)$  のみの函数である。

(2.7) を考慮し、(2.3) を使って (2.1) を書き換えるとやや長たらしいが次式を得る、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \phi_{x\zeta} &= -\delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_{x\zeta} - \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} p_x - \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} (\phi_{x\zeta} \phi_{xx\zeta} + \phi_{y\zeta} \phi_{xy\zeta} - \nabla_\tau^2 \phi \phi_{x\zeta\zeta}), \\ \mathcal{L}_0 \phi_{y\zeta} &= -\delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_{y\zeta} - \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} p_y - \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} (\phi_{x\zeta} \phi_{xy\zeta} + \phi_{y\zeta} \phi_{yy\zeta} - \nabla_\tau^2 \phi \phi_{y\zeta\zeta}), \\ -\mathcal{L}_0 \nabla_\tau^2 \phi &= \delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \nabla_\tau^2 \phi - \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} p_\zeta + \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} (\phi_{x\zeta} \nabla_\tau^2 \phi_x + \phi_{y\zeta} \nabla_\tau^2 \phi_y - \nabla_\tau^2 \phi \nabla_\tau^2 \phi_\zeta) \\ &\quad + Rc T - R_s S - \delta Rc T, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_0 T - \nabla_\tau^2 \phi = -\delta^{\frac{1}{2}} (\phi_{x\zeta} T_x + \phi_{y\zeta} T_y - \nabla_\tau^2 \phi T_\zeta) - \delta \tilde{\mathcal{L}}_2 T,$$

$$\lambda \mathcal{L}_0 \delta - \nabla_H^2 \phi = -\delta^{\frac{1}{2}} (\phi_{x\zeta} S_x + \phi_{y\zeta} S_y - \nabla_H^2 \phi S_\zeta) - \delta \tilde{\mathcal{L}}_3 S',$$

ここで

$$\mathcal{L}_0 = -\nabla_H^2, \quad \tilde{\mathcal{L}}_1 = \frac{1}{\omega} \partial_\tau - \partial_{\zeta\zeta}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_2 = \partial_\tau - \partial_{\zeta\zeta}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_3 = \partial_\tau - \lambda \partial_{\zeta\zeta}.$$

今扱うこいる系は無限系なので通常の意味の境界条件は存在しない。但し

$$|A| < \infty, \quad |A_\zeta| < \infty \quad \text{for any } \zeta \text{ and } \tau. \quad (2.9)$$

更に温度と濃度の保存則より

$$\langle T \rangle = \langle S \rangle = 0 \quad (2.10)$$

ここで  $\langle \rangle$  は全空間にわたる平均を意味する。

### §3 振幅方程式の導出

$\delta \ll 1$  である時には、物理量の漸近展開は  $\delta^{\frac{1}{2}}$  の冪級数の形で書ける事が摂動理論により知られている。即ち

$$\begin{aligned} p &= p^{(0)} + \delta^{\frac{1}{2}} p^{(1)} + \delta p^{(2)} + \dots \quad (\text{圧力に対して}) \quad (3.1) \\ Q &= \delta^{\frac{1}{2}} Q^{(1)} + \delta Q^{(2)} + \dots \quad (\text{圧力以外の } \phi, T, S \text{ に対して}) \end{aligned}$$

(3.1) を (2.8) に代入して  $\delta$  の冪で整理し、各 order で secularity を除いてゆく。  $O(\delta^{\frac{1}{2}})$  迄で次の解を得る。

$$\begin{cases} \phi'' = A''(\tau, \zeta) \sin lx \sin ly \\ T''' = -\phi''' + g'''(\tau, \zeta) \\ S''' = -\phi'''/\lambda + h'''(\tau, \zeta) \\ p^{(0)} = \sigma \int^3 (R_c g''' - R_s h''') d\zeta \\ p^{(2)} = \sigma \nabla_H^2 \phi_\zeta'' + f^{(2)}(\tau, \zeta) \end{cases} \quad (3.2)$$

$g''$ ,  $h''$  は各々, 温度・塩度場の水平平均を意味する。  $O(\delta)$  の式は形の上で  $O(\delta^{3/2})$  と全く同じ式に帰着し、従ってその解を得るには (3.2) の上付添字を 1 ずつ進めればよい。

展開 (3.1) を  $\tau, \zeta$  に関して uniformly valid にする為には  $O(\delta^{3/2})$  に現れる secular term を除かねばならない。その条件は、上付添字 (1) を落として次の三つの式で表わされる。

$$\begin{aligned} (\partial_\tau - \alpha \partial_{\zeta\zeta} - \beta + \beta g_\zeta - \gamma h_\zeta) A &= 0 \\ (\partial_\tau - \partial_{\zeta\zeta}) g &= \frac{\ell^2}{2} (A^2)_\zeta \\ (\partial_\tau - \lambda \partial_{\zeta\zeta}) h &= \frac{\ell^2}{2\lambda} (A^2)_\zeta \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで  $\alpha, \beta, \gamma$  は全 2 正の定数で

$$\alpha = 12\ell^4/D_e, \quad \beta = 2\ell^2 R_c/D_e, \quad \gamma = 2\ell^2 R_s/\lambda/D_e$$

$$D_e = R_s/\lambda^2 - R_c + 4\ell^4/\sigma \quad (3.4)$$

で与えられる。(3.3) で  $\partial_\zeta \equiv 0$  とすれば Stern の解

$$(A, g, h) = (e^{\beta\tau}, 0, 0) \text{ が得られる。}$$

これは一方向流であるが (2.1) 又は (2.8) の厳密解でもあるが、あまり現実的

ではない。現に垂直方向の波数  $m$  が  $m^2 < \frac{\beta}{\alpha + \frac{P_0}{\Gamma_1}}$  であ

る sinusoidal な無限小擾乱に対して Stern の解は不安定

である。ただし  $\Gamma_1 = \frac{\gamma}{\lambda} - \beta$ 。

#### §4 定常解とその安定性

条件 (2.9) (2.10) を満たす (3.3) の定常解は楕円関数で

表わされる。

$$A^{(5)} = \left\{ \frac{4\beta}{Q^2 \Gamma_2} \frac{k^2 K(k)}{2E(k) - (1-k^2)K(k)} \right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left[ \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{\frac{1}{2}} \zeta, k \right]$$

$$g^{(5)} = \lambda^2 h^{(5)} = \left\{ \frac{16\alpha\beta}{Q^4 \Gamma_2^2} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{Z} \left[ \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{\frac{1}{2}} \zeta, k \right] \quad (4.1)$$

ここで  $K(k)$ ,  $E(k)$  はそれぞれ第1種, 第2種完全楕円積分,  $\operatorname{Z}(\cdot, k)$  は Jacobi の ゼータ函数である。新たなパラメタ  $k$  (母数) が必要になるが, これは heat-salt Flux ( $F_T$ ,  $F_S$ ) の大きさを決める量と考えてよい。実際

$$F_T = \overline{wT} - T_S = -\frac{2\beta}{\Gamma_2} \frac{K-E}{2E - (1-k^2)K} = \lambda F_S \quad (4.2)$$

で,  $0 \leq k < 1$  に従って  $0 \leq F_T, F_S < \infty$  の全2の値を取り得る。前述した通り, この系は system size が特定されてないので, 系を完全に記述するには  $R_S, S$  の他にもう一つ独立なパラメタを指定しなければならない。図1に(4.1)の表す流れを模式的に示してある。この density profile は

実験室で観測されるものとよく似ている。流れの方は乱れている事が多い。

(4.1)の安定性は, フーリエ展開の打ちリシステムを用いて調べる。定常解をフーリエ成分に分解すれば,

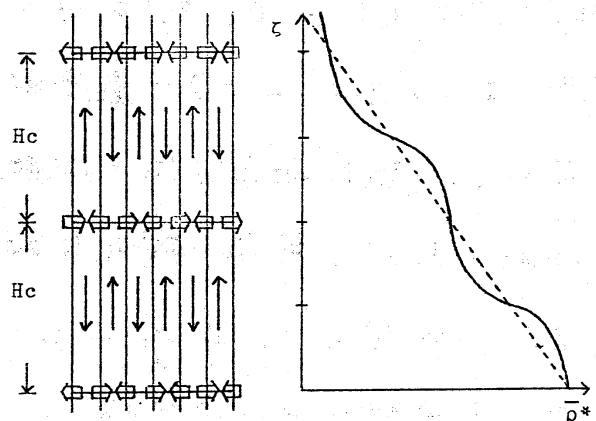


Fig.1 Schematic sketch of flow configuration and of mean density profile. The dashed line indicates the unperturbed linear distribution.



$$A^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \sin (2n+1) \pi z \quad (4.3)$$

$$g^{(s)} = \lambda^2 h^{(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} \sin 2n \pi z$$

ここで  $\pi = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2EK - (1-k^2)K}$ 。 先づ  $(A^{(s)}, g^{(s)}, h^{(s)})$  に加える擾乱  $(\mu, \nu, \rho)$  のフーリエ成分を

$$\mu = \sum \mu_{2n+1} \sin (2n+1) \pi z \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \rho \end{matrix} \right\} = \sum \left\{ \begin{matrix} \nu_{2n} \\ \rho_{2n} \end{matrix} \right\} \sin 2n \pi z$$

に限って、振幅変動に対する安定性を調べる。打切りは、定常解に対しては初項のみを残し  $(A_1, g_2)$ 、擾乱に対しては最初の2項を取る。更に  $g^{(s)}, \nu$  の寄与は  $h^{(s)}, \rho$  に対して一般に小さい ( $O(\lambda)$ ) ので、 $g^{(s)}, \nu$  は無視して、 $(\mu_1, \mu_3, \rho_2, \rho_4)$  に対する常微分方程式を立てる。その結果、少なくとも打切りが妥当な  $k^2$  のレンジ ( $k^2 < 0.999$ ) で (4.1) は高調波擾乱に対してたとえそれが有限擾乱であっても、常に安定である事がわかる。この安定性は (3.3) を数値的に解いても確認された。

次に波数変調した波  $\mu_{1 \pm 3} \sin (1 \pm 3) \pi z$  に対する安定性を調べてみよう。ここで  $\xi$  は detuning parameter;

$$0 < \xi < 2 \wedge \xi \neq 1$$

である。打切り精度は振幅変動の場合と同じくし、今度は

$(\mu_{1-3}, \mu_{1+3}, \rho_3, \rho_{2+3}, \rho_{2-3})$  に対して常微分方程式を立て

る。  $(W, X) = A_1^{-1} (\mu_{1-3}, \mu_{1+3})$ ,  $(Y, Z, V) = (g_2/\lambda^2) (\rho_3, \rho_{2+3}, \rho_{2-3})$

と置けば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta} \dot{W} &= -(G(1-\xi)^2 - 1)W - QX + \frac{Q}{2}(\xi Y - (2-\xi)V) \\ \frac{1}{\beta} \dot{X} &= -(G(1+\xi)^2 - 1)X - QW + \frac{Q}{2}(\xi Y - (2+\xi)Z) \\ \frac{1}{\beta} \dot{Y} &= -\xi^2 G \frac{\lambda}{\alpha} Y - \frac{\xi}{2} S \frac{\lambda}{\alpha} (W + X) \\ &\quad (4.5)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\beta} \dot{Z} = -(2+\xi)^2 G \frac{\lambda}{\alpha} Z + \frac{2+\xi}{2} S \frac{\lambda}{\alpha} X$$

$$\frac{1}{\beta} \dot{V} = -(2-\xi)^2 G \frac{\lambda}{\alpha} V + \frac{2-\xi}{2} S \frac{\lambda}{\alpha} W$$

$$\therefore \text{where } G = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2EK - (1-k^2)K}, \quad Q = 8G \frac{\delta}{1-\delta^2}, \quad S = 8G \frac{1+\delta}{1-\delta}$$

$$\delta = \exp(-\pi \frac{K'}{K}), \quad K' = K(\sqrt{1-k^2}). \quad (4.5) \text{ where } \xi = 2 \text{ and } k <$$

と, Resonant term を除いて振幅変動の式と一致する。

(4.5) を固有値問題と見做して安定性を吟味すれば Fig 3 の結果を得る。

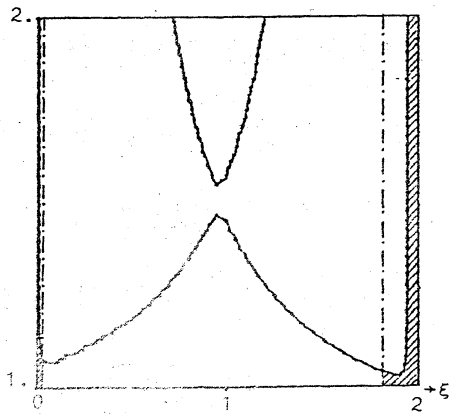


Fig. 3b:  $k^2 = 0.2$

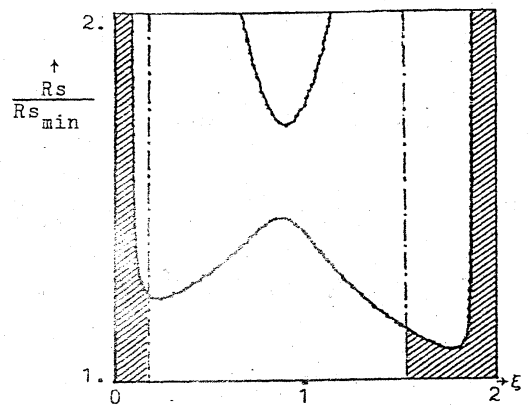


Fig. 3d:  $k^2 = 0.4$

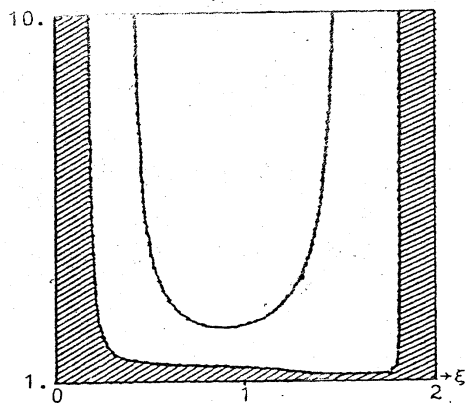


Fig. 3f:  $k^2 = 0.6$

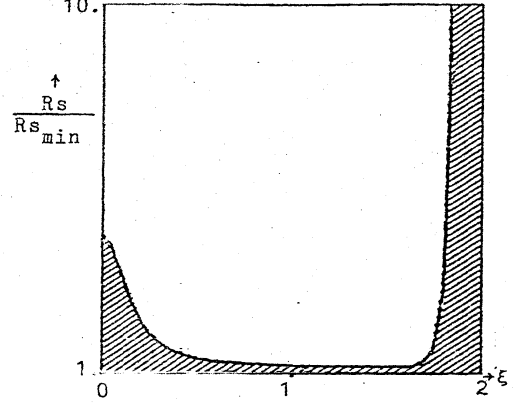


Fig. 3i:  $k^2 = 0.9$

斜線部が安定領域、鎖線は direct mode の中立線を表わす。  
 縦軸は  $R_s \min = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda}{1-\lambda}$  を単位にとっている。Fig 3b, 3d と  
 Fig. 3f, 3i とでは縦軸のスケールが異なっている事に注意。

安定領域の幅は  $R_s$  が少し大きくなると  $R_s$  に依存しなくなる。  
 これは(4.5)式の右辺が  $\alpha$  を通してのみ  $R_s$  に依存しており、  
 $\lambda \ll 1$  で  $R_s \rightarrow \infty$  の時直ちに  $\alpha \rightarrow 3\lambda$  となる事からも明らかで  
 ある。  $k^2$  が 0 から 1 へと向かうにつれ、安定領域の幅は一  
 旦増大し  $k^2 \sim 0.6$  あたりで最大に達し、再び減少してゆく。  
 即ち  $R_s$  を固定して考えれば ( $\ell$  を固定したに同じ)、  $k^2$  が小  
 さすぎても大きすぎても、  $\lambda \ll 1$  の微小な波数変調に対して  
 不安定であり、実験室で実現され得る定常フィンガーには適  
 当な  $k^2$  の値の範囲が存在するであろう。  $k^2$  は Flux の大き  
 さと共に単位コラム長  $H_c$  も規定するから、結局実現可能な  
 定常フィンガーには適当な縦横比 ( $H_c : \pi/\ell$ ) が存在する事にな  
 る。 実際のどの程度の変調波が紛れ込むかは実験精度によ  
 って大きく異なろう。  $\lambda > 2$  の部分は全域安定領域である。

また Fig. 3f, 3i には、  $R_s \approx R_s \min$  附近に全この事に関して  
 安定な領域が見えるが、もしこの結果を正しいとすれば、実  
 験事実と反して幅の広い ( $\ell \approx 0$ ) 安定な finger が多く観測さ  
 れなければならない。 この困難は今後の解析が全  $\phi$  planeform  
 を固定し、垂直方向の擾乱だけを考慮した議論である事に因

る。次章では lateral modulation として finger と共存し得る cross-roll を考え、その安定性への寄与を考察する。

### §5 クロスロール

実験室でソルトフィンガーを作る場合、フィンガモードが単独で現れる事は稀で、大抵不規則なロールモードを伴っている。そうしたロール解は多分引き延ばされたばかりでなく元の  $\Sigma$  にも依存するであろう。そこで  $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \delta^{\pm} \frac{\partial}{\partial \zeta}$  とし、(2.3) の代わりに速度場を次の形におく。

$$(u, v, w) = (\Xi_{x2} - \Psi_y + \delta^{\pm}(\Xi + \phi)_{x\zeta}, \Xi_{y2} + \Psi_x + \delta^{\pm}(\Xi + \phi)_{y\zeta}, -\nabla_{\perp}^2(\Xi + \phi)), \quad (5.1)$$

ここで  $\Xi(x, y, z; \zeta, \tau)$  はロールモードを表し、 $\phi(x, y; \zeta, \tau)$  は従来通りフィンガモードを表す。この場合、 $\Xi$  と  $\phi$  の相互作用により、 $\Psi$  はもはや恒等的にゼロではない。(5.1) に従って (2.8) を書き直し、§3 の手続きを繰返すと  $O(\delta)$  の可解条件から

$$\Xi'' = \{B'' \exp(iKz) + c.c.\} \sin\left(\frac{l}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{l}{2}y + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.2)$$

でなければならぬ事がわかる。これは finger の2倍の幅を持つクロスロールである。但しこの時  $\phi'' = A'' \sin lx \sin ly$   $K^2 = (2^{1/2} - 1/2)l^2$ ,  $B''$  は  $z, \zeta$  の関数で complex function である。(5.2) を決定すると  $O(\delta)$  の可解条件は上付添字 1) を落として

$$B_J = RAB \quad (R \text{ は正の定数}) \quad (5.3)$$

と書ける。一方  $O(\delta^{3/2})$  から

$$\begin{aligned} (\partial_z - \alpha \partial_{JJ} - \beta + \beta g_J - \gamma h_J + \Omega |B|^2) A &= 0 \\ (\partial_z - \partial_{JJ}) g &= \frac{\ell^2}{2} (A^2)_J + \frac{\ell^2}{4} \bar{z}^{4/3} (B^* B)_J \\ (\partial_z - \lambda \partial_{JJ}) h &= \frac{\ell^2}{2\lambda} (A^2)_J + \frac{\ell^2}{4\lambda} \bar{z}^{4/3} (B^* B)_J \end{aligned} \quad (5.4)$$

を得る。B に対する発展方程式も得られるが、これは次の order の  $A^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$  を含む  $O(\delta^2)$  の可解条件と組み合わせるべきものである。

次に (5.3) (5.4) には空間周期性を持つ定常解は存在するのであらうか。適当な境界条件の下では確かに空間周期性を持つ定常解が存在して、それは次の implicit form で表わされる。

$$J = \int_{D_{\min}}^D \frac{dD}{\sqrt{\frac{p}{g} - \frac{r}{g-2} e^{2D} + \sqrt{\frac{2}{g}} (a \operatorname{sh} \sqrt{2g} D + b \operatorname{ch} \sqrt{2g} D)}} \quad (5.5)$$

但し、 $D = \log |B|$ ,  $p = \frac{\beta + \beta_2 C}{\alpha}$ ,  $g = \frac{\beta_2 \ell^2}{2\alpha R^2}$ ,  $r = \frac{1}{\alpha} (\Omega + \frac{\beta_2 \ell^2}{4} \bar{z}^{4/3})$ ,  $C = \langle \frac{\ell^2}{2} A^2 + \frac{\ell^2}{4} \bar{z}^{4/3} B B^* \rangle$ .  $a, b$  は境界条件から定まる定数である。(5.5) は  $g \neq 2$  の解であるが、 $g = 2$  の場合も解は直ちに書き下せる。

(5.3) を見て容易にわかる様に、重要なのは  $\Omega$  の符号で  $\Omega > 0$  ならば B は A の安定化要素として働き、 $\Omega < 0$  ならば不安定化要素となる。水 ( $\alpha \approx 10$ ) の中に温度と塩分 ( $\lambda \approx 10^2$ )

が分布した系では  $R_S \approx 2.11 \times 10^{-3}$  ( $\approx 2 R_{S \text{ min}}$ ) で  $\Omega$  は零卓を持ち、 $R_S < 2.11 \times 10^{-3}$  では  $\Omega < 0$  となる。即ち Fig 3f, 3i の底部にある全ての  $\lambda$  に対して安定な領域は lateral modulation を考慮すれば存在しない。フィンガーは単位エラム長より有意に長い波長の波に対して常に不安定である。

唯一の定常解が不安定であるからには (3.3) 又は (5.3) (5.4) で表わされる系は如何なる挙動を示すのか、次にそれらモデル方程式を数値的に解いた結果を示す。

### §6. 数値計算

以下 (3.3) を周期的境界条件の下で Crank-Nicholson の方法を用いて解いた結果を示す。紙幅の都合により  $\lambda$  の図は省いてある。 $\lambda$  は与えられた擾乱の detuning parameter,  $T$  は time sequence line の時間間隔, 卓線は定常解,  $k^2$  はその母数,  $R_S$  は塩度レーリー数。 $i.$  は初期状態,  $f.$  は終状態を表わす。矢印は時間発展のおよその方向である。

Fig. 6a は 3 倍波長の可成大きな擾乱を加えた場合で、極く初期を除いては単調な長い波の発散が見られる。これには特徴的な鋸波が現れ、階段状密度分布を形成する。当初、 $\lambda > 1/2$  の波は全て単調な成長を示すものと考えていたが、その後初期に微かな擾乱を加えた場合 ( $\lambda = 2/3$ ,  $k^2 = 0.6$ )、興味ある進行波解が見つかった。これについては次稿 (57年

夏・数研研講究録・N-S 方程式の解(石井・楠本)に譲りたい。

Fig 6 b. は 2 倍波長の擾乱で, 長時間に亘って chaotic な振動が続くが, 突如 subharmonic の出現によって発散を起している。これは mode-coupling では説明できない現象で, 多分数値誤差の集積によって生じた長い成分が, その誘導時間後に急激な成長をする為と考えられる。従って理想的な条件下では, この振動はいつまでも続く筈である。

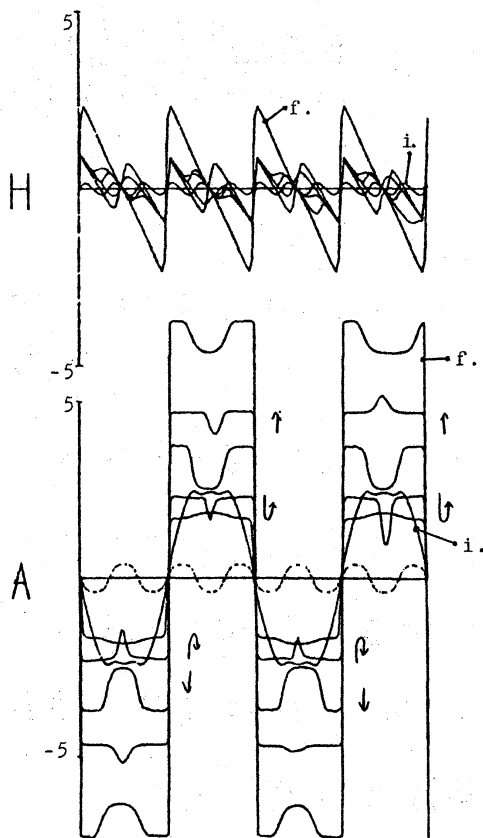


Fig. 6a  $\xi = 2/3$   $T=400$   
 $k^2=0.9$   $R_s=10$

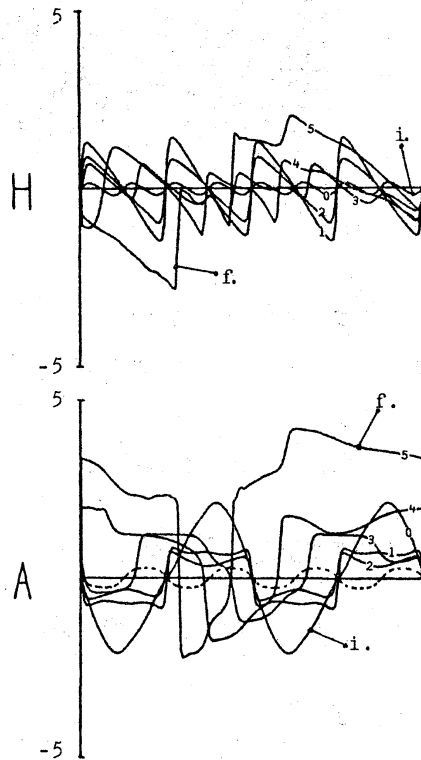


Fig. 6b  $\xi = 1/2$   $T=400$   
 $k^2=0.9$   $R_s=10$

※(見易さを考慮して倍率は各図毎に異なっているのに注意)

次に  $\xi < \frac{1}{2}$  の場合を見る。

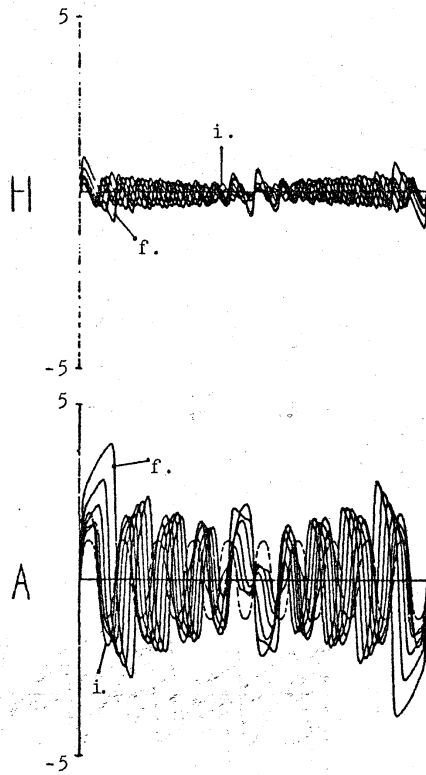


Fig. 6c  $\xi = 0.1$   $T = 400$   
 $k^2 = 0.9$   $R_S = 10$

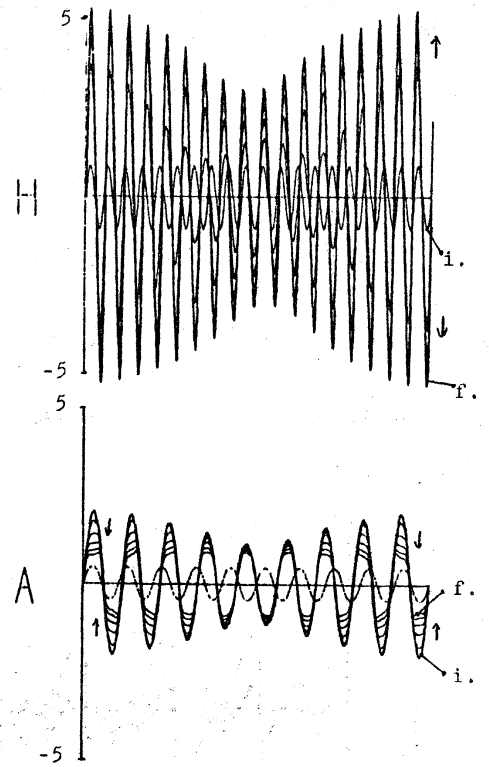


Fig. 6d  $\xi = 0.1$   $T = 160$   
 $k^2 = 0.6$   $R_S = 0.06$

Fig. 6c, 6d は共に  $\xi = 0.1$  の波を加えた場合である。但し 6c は線形安定論では不安定、6d は安定なパラメタレンジにあり (Fig 3f, 3i 参照)、両者の相違は明瞭である。6c では A はゆっくり成長しながら phase shift を伴う振動を始めるのに対し、6d では A の初期擾乱は減衰する。6d の  $i$  は成長しているように見えるが、これは initial stage である為で、やがてこれも減衰する事がその後の長時間に亘る計算によって確かめられた。



最後に §5 で述べたクロスロールの影響について見てみよう。

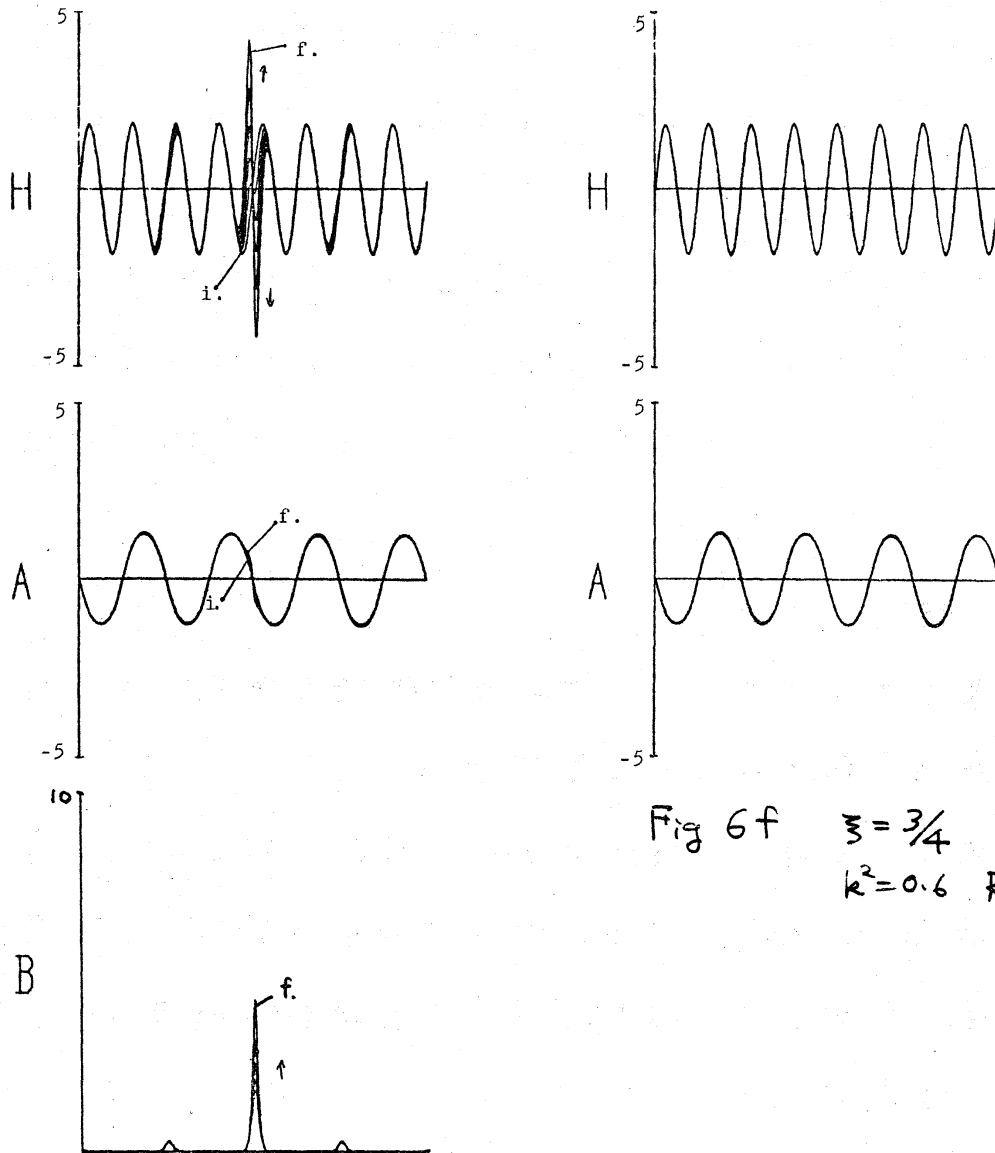


Fig 6f  $\xi = 3/4$   $T = 2$   
 $k^2 = 0.6$   $R_S = 1.02 \times 10^{-3}$

Fig 6e  $\xi = 3/4$   $T = 2$   
 $k^2 = 0.6$   $R_S = 1.02 \times 10^{-3}$

Fig. 6e は B を加えた以外、全く 6f と同じパラメータ領域にある。即ち Fig 3f の底部にある安定領域。  $\xi = 3/4$  (4倍波長) の擾乱は定常解に較べて極く小さく取っている。 6f では

線形安定論の結果を反映して擾乱は全く成長しない。クロ  
スロールの存在により、フィンガーが不安定化されている事  
は6eから明らかである。猶、Bの境界条件としては

$z=0$  ( $A=0, A_z < 0$ )なる位置で  $B=B_0$  に取り、

$$B = B_0 \exp \left[ R \int_0^z A dz \right]$$

により計算した。従つてBの影響は  $A_z > 0$  の場合に較べ小  
さく見られる。  $B_0$  はフィンガーモードが存在しない  
場合、クロスロールが全空間に一様に分布する時の振幅であ  
る。

## §7 結論

- 1、定常なフィンガーは、流れの自己相互作用により空間周  
期性を持ち、無限に延びる事はない。
- 2、定常フィンガーは振幅変動に対しては安定であり、自発  
的 breakdown も起こす事はないが、その単位コウチ長より  
有意に長い外部からの擾乱（例えば長波長内部波など）に対  
しては不安定である。
- 3、不安定化された finger はその擾乱の波長と振幅の大きさ  
により、一気に乱れてしまうか、長い寿命の（海洋程度の成  
層では数日から数週間）非周期振動を経過した後、乱流に移  
行するかの孰れかであると思われる。振動が永續するよう  
な理想的状況は多分自然界には存在しない。 Stern & Turner

(1969)の実験に見られる長寿命のゆらぎはこれかも知れないが、深いタンクを用いて層流フラインガーの時間的・空間的挙動を詳細に調べた実験は現在迄に余りない。

[参考文献]

Shirtcliffe & Turner	1970	JFM	<u>90</u>	449
Stern, M. E.	1960	Tellus	<u>12</u>	172
Stern, M. E.	1969	JFM	<u>35</u>	209
Stern & Turner	1969	Deep-Sea Res	<u>16</u>	497
Turner, J. S.	1967	Deep-Sea Res	<u>14</u>	599